Sujets du deuxième trimestre pouvant encore être pris : 1,5,7,10,11,12,14,15,21,22,24,35,36,38,39,42,43,44.

SUITES ET INFORMATIQUE

1. Jeu de la dichotomie

   Le jeu consiste à retrouver un nombre entre 1 et N avec un nombre minimum de coups, en appliquant une méthode de dichotomie (approchée : si l'on tombe sur 58,5 en appliquant la méthode exacte, on choisira 58);

   (a) Faire un programme mathematica déterminant le nombre de coups nécessaires pour retrouver un entier n donné entre 1 et N ; puis un programme donnant la moyenne du nombre de coups nécessaires pour retrouver un entier entre 1 et N (application numérique pour $N = 100$).

   (b) Déterminer mathématiquement la moyenne du nombre de coups nécessaires dans le cas où N est une puissance de deux ; comparer le résultat trouvé pour 100 dans a) avec les résultats trouvés ici pour 64 et 128 ; déterminer un équivalent du nombre moyen de coups quand N tend vers l'infini.

   (c) Lors de l'ultime épreuve de l'émission "le juste prix", le candidat doit estimer le montant d'une vitrine remplie de cadeaux.Pour cela, on la lui présente en détails et on lui indique que son juste prix est compris entre 10.000 \[Euro] et 50.000 \[Euro].Il dispose ensuite de 30 secondes pour faire autant de propositions qu'il souhaite, à haute voix, en étant à chaque fois guidé par l'animateur qui lui indique si le montant qu'il a donné est plus cher ou moins cher que le prix réel.Si le juste prix est retrouvé dans ce délai,le candidat remporte la vitrine.................................

   FONCTIONS NUMÉRIQUES

2. * : Problèmes d'extrémum.

   (a) Dans un rectangle $R = (ABCD)$, on pose $L = AD + DC + CB$; déterminer la forme "dite R_1" du rectangle R qui pour L donné a la plus grande aire , puis la forme "dite R_2 " du rectangle R qui pour L donné engendre, par rotation autour de (AB) le cylindre ayant le plus grand volume. Calculer l'aire S_1 et le volume V_1 en fonction de L dans le cas R_1, puis l'aire S_2 et le volume V_2 dans le cas R_2.

   (b) Même problème avec cette fois un triangle $T = (ABC)$ isocèle en C et $L = AC + CB$. On obtiendra des aires S_3 et S_4 et des volumes V_3 et V_4; on comparera les S_i entre eux, et les V_i entre eux.

3. : Dérivabilité et taux d'accroissement non centrés.

   Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et continue en 0.

   (a) Le fait que le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\dfrac{x}{2}}$ possède une limite finie quand x tend vers 0 implique-t-il que f est dérivable en 0 ?

   (b) Pour quelles valeurs de k le fait que $\dfrac{f(x) - f(kx)}{x - kx}$ possède une limite finie quand x tend vers 0 implique-t-il que f est dérivable en 0 ?

4. : Une généralisation de la factorielle aux réels.

   On définit une fonction f sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = x(x-1)(x-2)...(x-n+1)$ pour $x \in [n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ ($f(x) = 1$ pour $x \in [0, 1[$)

   (a) Donner la valeur de $f(n)$ et justifier que f est infiniment dérivable sur $[1, +\infty[\setminus \mathbb{N}$.

   (b) Tracer la courbe de f sur $[0, 3]$.

   (c) Ecrire une fonction mathematica *récursive* calculant $f(x)$: $f[x\_] := Which[x < 0, \text{erreur}, x < 1, ..., True, ...]$

   (d) Montrer que f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

   (e) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f'_g(n) = n!\,(h_n - 1)$ et $f'_d(n) = n! h_n$ (où $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$).

5. : Une généralisation plus précise.

   (a) Soit f une fonction définie sur $]-1, +\infty[$, de classe C^p ($p \geqslant 1$) sur $]0, 1[$, vérifiant $f(0) = 1$ et $f(x) = xf(x-1)$ pour $x > 0$;

i. Montrer que $f(n) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii. Montrer que si f est continue en 0, $f(-1+u) \underset{u \overset{>}{\to} 0}{\sim} \dfrac{1}{u}$.

iii. Montrer que f est de classe C^p sur $]-1,+\infty[\setminus \mathbb{N}$.

iv. Montrer que f est continue sur $]-1,+\infty[$ ssi f est continue à gauche en 1 et à droite en 0 et $f(0) = f(1)$.

v. Montrer que f est de classe C^p sur $]-1,+\infty[\Leftrightarrow f$ est de classe C^p à gauche en 1 et à droite en 0 et pour tout $k \in [1,p]$ $f_g^{(k)}(1) = f_d^{(k)}(0) + kf_d^{(k-1)}(0)$.

(b) Soit réciproquement f une fonction de classe C^p sur $[0,1]$ telle que pour tout $k \in [1,p]$ $f_g^{(k)}(1) = f_d^{(k)}(0) + kf_d^{(k-1)}(0)$, avec $f(0) = f(1) = 1$; pour $x > 1$, on pose $f(x) = x(x-1)...(x-n+1)f(x-n)$, où n est la partie entière de x ;
pour $x \in]-1,0[$, on pose $f(x) = \dfrac{f(x+1)}{x+1}$;montrer que $f(x) = xf(x-1)$ pour $x > 0$ et que f est de classe C^p sur $]-1,+\infty[$.

(c) Déterminer une fonction f polynomiale sur $[0,1]$ vérifiant les conditions de (b) pour $p = 1$, et la tracer sur $[-0,8 ; 2,5]$.

6. : Les polynômes de LEGENDRE : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le $n^{ième}$ polynôme de Legendre par :

$$L_n = \frac{1}{2^n n!} D^n \left(\left(X^2 - 1\right)^n \right)$$

(a) Calculer L_i pour $i = 0, 1, 2, 3$.

(b) Calculer L'_{n+1} de deux façons différentes, et en déduire la relation différentielle : $\left(1 - X^2\right) L''_n - 2XL'_n + n(n+1) L_n = 0$.

(c) Montrer la formule de récurrence : $L_n = \dfrac{1}{n}\left((2n-1) XL_{n-1} - (n-1) L_{n-2}\right)$; calculer L_4 par cette méthode.

(d) Résoudre l'équation différentielle : $\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + n(n+1) y = 0$.

7. : Les polynômes de LAGUERRE

(a) On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in \mathbb{R} \quad l_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x}\right)$$

(b) Calculer $l_0(x), l_1(x), l_2(x), l_3(x)$.

(c) Montrer que l_n est une fonction polynomiale de degré n à coefficients rationnels. Soit L_n le polynôme formel associé à l_n (appelé $n^{ième}$ polynôme de LAGUERRE).

(d) Montrer la relation de récurrence double: $L_n = -\dfrac{1}{n}\left((X - 2n + 1) L_{n-1} + (n-1) L_{n-2}\right)$.

(e) Montrer la relation différentielle : $XL''_n + (1 - X) L'_n + nL_n = 0$.

(f) Résoudre l'équation différentielle : $xy" + (1 - x) y' + ny = 0$.

8. Pour quelles valeurs de n existe-t-il une solution polynomiale à l'équation différentielle $y' - 2xy = x^n$? Résoudre l'équation dans ce cas.

9. : (deux personnes) Ordre d'une racine pour une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

On utilisera dans cet exercice le théorème de prolongement des dérivées : si f est continue en x_0 et de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage pointé de x_0, et si $f^{(k)}$ possède une limite stricte $l_k \in \mathbb{R}$ en x_0 pour tout k alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en x_0, et $f^{(k)}(x_0) = l_k$.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 telle que $f(0) = 0$; on pose $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$; montrer que g est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, et que $g^{(k)}(0) = \dfrac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}$.

(b) On dit que x_0 est une racine d'ordre p de f, fonction $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de x_0 s'il existe une fonction g $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de x_0 , non nulle en x_0, telle que au voisinage de x_0 : $f(x) = (x - x_0)^p g(x)$.
Montrer que

$$0 \text{ est racine d'ordre } p \text{ de } f \Leftrightarrow f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(p)}(0) = 0 \text{ et } f^{(p+1)}(0) \neq 0$$

Énoncer et prouver le théorème similaire en x_0.

(c) Exemples : montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$:

- $\begin{cases} x \neq 0 \mapsto \dfrac{\sin x}{x} \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$.
- $\begin{cases} x \neq 0 \mapsto \dfrac{1 - \cos x}{x^2} \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$.
- $\begin{cases} x \neq 0 \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}} \\ 0 \mapsto e \end{cases}$.

(d) Application : soient f et g deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de x_0, nulles en x_0, g non nulle au voisinage pointé de x_0 et telles que $\dfrac{f}{g}$ possède un prolongement par continuité h en x_0.

i. Montrer que si l'une des dérivées successives de g en x_0 est non nulle, alors h est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de x_0.

ii. Considérant $|x| e^{-\dfrac{1}{x^2}}$ et $e^{-\dfrac{1}{x^2}}$, montrer que ce résultat peut être faux si toutes les dérivées de g en x_0 sont nulles.

10. * : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue au voisinage de x_0, dérivable au voisinage épointé de x_0. D'après le théorème des accroissements finis, on a donc au voisinage de x_0, $f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(c_x)$ avec $c_x \in]x_0, x[$.
On pose $x - x_0 = u$ et $c_x = x_0 + \theta_u u$ avec $\theta_u \in]0,1[$.
On souhaite déterminer $\lim\limits_{u \to 0} \theta_u$.

(a) Calculer c_x et la limite de θ_u lorsque $f(x) = x^2$, puis $\sqrt{x}$, puis x^3, puis $\dfrac{1}{x}$.
Réponses : pour x^2 : $c_x = \dfrac{x + x_0}{2}$, $\theta_u = \dfrac{1}{2}$.
pour $\sqrt{x}$: $c_x = \left(\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{2}\right)^2$; $\theta_u \to \dfrac{1}{2}$ si $x_0 > 0$, $\theta_u \to \dfrac{1}{4}$ si $x_0 = 0$.
pour $\dfrac{1}{x}$: $c_x = \sqrt{x_0 x}$, $\theta_u \to \dfrac{1}{2}$.

(b) On se propose de montrer que si f est deux fois dérivable en x_0 avec $f''(x_0) \neq 0$, et $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x_0, alors $\lim\limits_{u \to 0} \theta_u = \dfrac{1}{2}$.

i. A l'aide de la formule de Taylor-Young en x_0, montrer que

$$f'(c_x) = f'(x_0) + \frac{u}{2} f''(x_0) + o(u)$$

ii. Evaluer $f'(c_x) - f'(x_0)$ en fonction de $f''(x_0)$ et conclure.

(c) Quelle est l'interprétation géométrique du résultat ?

11. * : Soit $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$.

(a) Justifier sans calcul, le fait que f admet un DLP à tout ordre en 0 ; soit C_n le coefficient de x^n dans ce développement.

(b) Montrer que $f(x) = 1 + x f^2(x)$.

(c) En déduire que $C_{n+1} = \sum\limits_{i+j=n} C_i C_j$ et que C_n est entier pour tout n.

(d) Montrer que $C_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ (nombre de Catalan).

12. : La courbe du funambule à la poulie.

Un funambule marche sur une corde attachée à l'une de ses extrémités, passant par une poulie située à même hauteur que l'extrémité attachée, et tendue par un contre-poids attaché à l'autre extrémité.

(a) Si k est le rapport de la masse du contre-poids à celle de l'homme , l'extrémité attachée en O et la poulie en $A(1,0)$, l'axe Oy vers le bas, montrer que les pieds $M\,(x,y)$ du funambule décrivent la courbe d'équation

$$y = \frac{x\,(1-x)}{\sqrt{k^2-x^2}}$$

Indication : utiliser la loi des sinus dans le triangle OAM.

(b) Etudier la fonction $f_k : x \mapsto \dfrac{x\,(1-x)}{\sqrt{k^2-x^2}}$ en discutant suivant les valeurs de $k>0$ et faire une figure avec diverses courbes pour $0 \leqslant x \leqslant 1$; interpréter physiquement.

13. Un point matériel de masse m soumis à une force de gravitation constante d'accélération g et à une force de frottement dirigée en sens contraire d'intensité de la forme $k_1 f\,(v)$, où v est la vitesse, est en chute verticale.

(a) Justifier l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{x} + kf\left(\dot{x}\right) = g$ où $k = k_1/m$.
Dans la suite, on suppose que pour $t=0$, x et $\dot{x}$ sont nuls.

(b) Déterminer x en fonction de t dans le cas d'un frottement nul.

(c) Déterminer x en fonction de t dans le cas d'un frottement proportionnel à la vitesse ($f\,(v) = v$). Montrer que la courbe de x en fonction de t possède une asymptote.

(d) Déterminer x en fonction de t dans le cas d'un frottement proportionnel au carré de la vitesse ($f\,(v) = v^2$). Montrer que la courbe de x en fonction de t possède une asymptote.

Indication : montrer qu'on peut mettre l'équation différentielle sous la forme : $\dfrac{d\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\dot{x}\right)}{1-\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\dot{x}\right)^2} = \sqrt{kg}dt$

(e) Tracer les 3 courbes pour $k = g = 1$.

14. : Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a<b$; f une fonction numérique continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$; F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

(a) Encadrer le nombre $I\,(f) = f^{-1}\left(\dfrac{F\,(b) - F\,(a)}{b-a}\right)$.

(b) On pose $f\,(x) = x^t$; $t \in \mathbb{R}^*$ et $m\,(t) = I\,(f)$.
Calculer $m(t)$ pour $t \neq 0, -1$. Reconnaître $m\,(1)$. Calculer $m\,(-1)$ (l'expression obtenue est appelée *moyenne logarithmique* de a et b).

(c) Déterminer $\lim\limits_{t\to 0} m\,(t)$. On peut ainsi prolonger m par continuité.

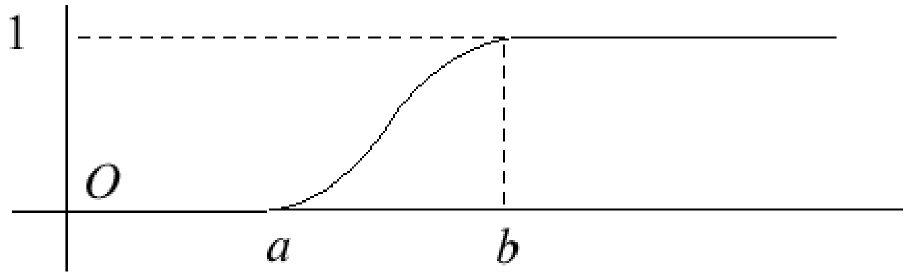
(d) Démontrer que m est croissante sur $\mathbb{R}$. En déduire dans quel ordre sont les moyennes arithmétique, géométrique et logarithmique de deux réels.

15. : On donne $f : \left| \begin{array}{l} x \leqslant 0 \mapsto 0 \\ x > 0 \mapsto e^{-\frac{1}{x}} \end{array} \right.$.

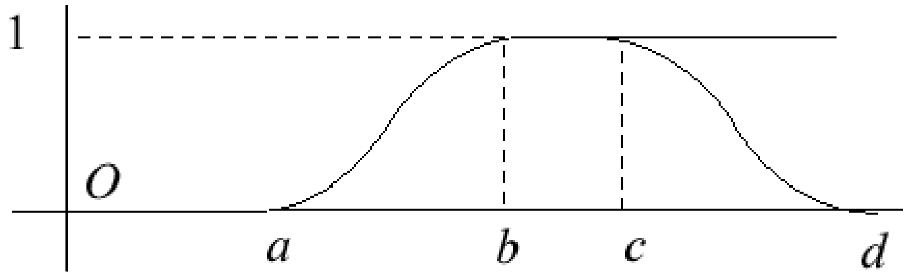
(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et tracer $\mathcal{C}_f$.

(b) Soit $g : x \mapsto \dfrac{f\,(x)}{f\,(x) + f\,(1-x)}$; montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Tracer $\mathcal{C}_g$.

(c) Trouver une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, dont la courbe soit :



(d) Même question pour :



16. : Soit $\mathbb{E}$ l'ensemble des applications f de $[a,c]$ vers $\mathbb{R}$ qui sont polynomiales de degré 2 au plus sur $]a,b[$ et sur $]b,c[$ (on a $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $b \in]a,c[$). On n'impose aucune condition sur $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$.

(a) Montrer que $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

(b) Quelle est la dimension du sous-espace $\mathbb{E}_1$ des fonctions de $\mathbb{E}$ qui sont continues sur $[a,c]$?

(c) Quelle est la dimension du sous-espace $\mathbb{E}_2$ des fonctions de $\mathbb{E}$ qui sont dérivables sur $[a,c]$?

17. : Intégrale d'une suite de fonctions

(a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 (1-x^n)\,dx$ (visualiser ce qui se passe sur une figure).

(b) Dans l'exemple précédent, on pouvait déterminer une primitive de l'intégrande, ce qui facilitait la recherche de la limite ; cependant ce n'est pas toujours possible, par exemple pour $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt{1-x^n}dx$;

Posons donc $I_n = \int_0^1 \sqrt{1-x^n}dx$.

i. Calculer I_1 et I_2, et faire une figure.

ii. Soit $u_n \in]0,1[$; vérifier que $\int_0^{u_n} \sqrt{1-x^n}dx \geqslant u_n\sqrt{1-u_n^n}$; en déduire que si l'on trouve une telle suite (u_n) vérifiant : $\lim\limits_\infty u_n = 1$ et $\lim\limits_\infty u_n^n = 0$, alors $\lim\limits_\infty I_n = 1$.

iii. Déterminer une telle suite (u_n) et conclure.

(c) autre méthode : on fixe $\varepsilon > 0$, démontrer :

$$\exists \alpha \in]0,1[\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N \quad \left| \begin{array}{l} \int_0^\alpha 1-\sqrt{1-x^n}dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ \int_\alpha^1 1-\sqrt{1-x^n}dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right.$$

en déduire $\lim\limits_\infty I_n = 1$.

(d) Démontrer de même que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx = 0$, sans chercher à exprimer $\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx$ en fonction de n.

(e) On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n sur $[0,1]$ par :

$$\left| \begin{array}{l} \text{si } x < 1 - \dfrac{1}{n} \text{ ou } x = 1,\ f(x) = 0 \\ \text{sinon, } f(x) = -n \end{array} \right.$$

Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ pour x fixé $\in [0,1]$? Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$?

18. : Une expression intégrale de la moyenne arithmético-géométrique (cf. exercice 26 sur les suites).

(a) Soient $a \leqslant b$ deux réels > 0 ; on pose $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$; montrer, à l'aide du changement de variable défini par $\sin t = \dfrac{2a\sin u}{a+b+(a-b)\sin^2 u}$ (à justifier) que $I(a,b) = I\left(\sqrt{ab}, \dfrac{a+b}{2}\right)$.

(b) On pose $m = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{I(a,b)}$; montrer que $a \leqslant m(a,b) \leqslant b$.

(c) Démontrer que m est la moyenne arithmético-géométrique de a et b, c'est-à dire la limite μ des suites adjacentes (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

On admettra que la fonction $(a,b) \mapsto I(a,b)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui résultera simplement d'un théorème vu en spé.

19. : Quel est le signe de $I = \displaystyle\int_0^{1/\pi} \sin\frac{1}{x}dx$? Déterminer numériquement un réel A tel que $0 < A < |I|$.

20. : Pour $r \notin \{-1,1\}$, on définit l'intégrale de Poisson par $I_n(r) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{r^2 - 2r\cos x + 1}dx$

(a) Justifier l'existence de $I_n(r)$; montrer que $I_0(r) = \dfrac{\pi}{|1-r^2|}$

(b) Déterminer pour $r \neq 0$ une relation entre $I_n(r)$ et $I_n\left(\dfrac{1}{r}\right)$.

(c) Montrer que pour $n \geqslant 1$ et $r \neq 0$:

$$I_{n-1}(r) + I_{n+1}(r) = \left(r + \frac{1}{r}\right) I_n(r)$$

(d) En déduire que pour $r \neq 0, I_n(r) = A(r)\,r^n + \dfrac{B(r)}{r^n}$.

(e) Montrer que pour $|r| < 1$ $I_1(r) = \dfrac{\pi r}{1-r^2}$; déterminer $I_n(r)$ pour $|r| < 1$.

(f) Calculer $I_n(r)$ pour $|r| > 1$.

(g) Autre méthode pour déterminer $I_n(r)$ pour $|r| < 1$; en utilisant $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k + \frac{u^n}{1-u}$, montrer que

$$\frac{1-r^2}{r^2-2r\cos x+1} = -1 + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-re^{ix}}\right) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} r^k\cos kx + 2r^n\frac{\cos nx - r\cos((n-1)x)}{r^2-2r\cos x+1}$$

et en déduire en intégrant entre 0 et π que $I_n(r) = rI_{n-1}(r)$, d'où l'expression de $I_n(r)$.

21. : L'opérateur de Hardy-Littlewood
Soit f une fonction numérique continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction g par

$$\begin{cases} x \neq 0 \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \\ 0 \mapsto f(0) \end{cases}$$

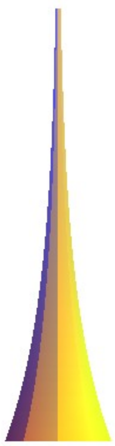
(a) Prouver : f continue en $0 \Rightarrow g$ continue en 0.
(b) Si f est paire, que dire de g ?
(c) Prouver : f croissante sur $\mathbb{R} \Rightarrow g$ croissante sur $\mathbb{R}$.
(d) On suppose $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   i. Montrer que g est dérivable en 0.
   ii. Montrer que g est deux fois dérivable en 0
   iii. Admettant que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (ce qui résulte de 5) a)), déterminer la valeur de $g^{(n)}(0)$?
(e) Prouver $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
(f) Prouver $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
(g) Prouver f $T-$périodique $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt$.
(h) Vérifier que $f \mapsto g$ définit un endomorphisme HL de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que HL est injectif mais non surjectif.

22. Existe-t-il deux polynômes P et Q tels que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}e^x$ soit une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$?

23. On pose, pour n entier naturel, $f_n(x) = x^n e^{x^2}$; montrer que si n est impair, il existe un unique polynôme P tel que $g : x \mapsto P(x)e^{x^2}$ soit une primitive de f_n, tandis que si n est pair il n'existe aucun polynôme P tel que $g : x \mapsto P(x)e^{x^2}$ soit une primitive de f_n.

24. : La tour à pression constante.

(a) La tour ci-dessous a été construite en faisant tourner autour de Ox la courbe de la fonction $x \mapsto e^{-x}$; on demande de montrer que la pression exercée sur toute section horizontale de la tour (considérée comme pleine d'une matière homogène) par la partie supérieure reste constante.



(a) Montrer que à similitude près, ce profil exponentiel est le seul possible pour une tour à pression constante (et que donc, mathématiquement, on ne peut trouver une telle tour de hauteur finie).

ALGÈBRE + INFO

25. Polynômes de Lagrange.

(a) On se donne deux suites de réels $(x_i)_{i\geqslant 1}$ et $(y_i)_{i\geqslant 1}$ la première étant formée de réels distincts.

En utilisant l'application $f : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n \\ P \mapsto (P(x_1), ..., P(x_n)) \end{array} \right.$ montrer que pour tout $n \geqslant 1$ il existe un unique polynôme P de degré $\leqslant n-1$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i de 1 à n. Ce polynôme est noté $L_{1,2,..,n}$.

(a) Montrer que $L_{1,2,3} = \dfrac{X - x_3}{x_1 - x_3} L_{1,2} + \dfrac{X - x_1}{x_3 - x_1} L_{2,3}$.

(b) Trouver de même une relation permettant de calculer $L_{1,2,..,n}$ connaissant $L_{1,2,..,n-1}$ et $L_{2,..,n}$.

(c) Programmer le calcul de $L_{1,2,.,n}$.

ALGÈBRE LINÉAIRE

26. : Soit A la matrice d'un endomorphisme f de $\mathbb{E}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$. Si σ est une permutation de $[|\ 1; n\ |]$, on note A_σ la matrice de f dans la base $\left(\overrightarrow{e_{\sigma(1)}}, ..., \overrightarrow{e_{\sigma(n)}}\right)$.

(a) Calculer A_σ dans les cas suivants :

i. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $\sigma = \langle 1, 2 \rangle$

ii. $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ et $\sigma = \langle 1, 2, 3 \rangle$ $(\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3..)$

iii. $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ et $\sigma = \langle 1, 3 \rangle$

iv. $A = I_n$ et σ quelconque.

(b) Démontrer que $A_\sigma(i, j) = A(\sigma(i), \sigma(j))$.

(c) On rappelle que deux matrices A et A' sont semblables lorsqu'elles représentent le même endomorphisme f. Déterminer, en vous aidant de ce qui précède, quelles sont, parmi les matrices suivantes, celles qui sont semblables :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

27. : $\mathbb{E}$ est rapporté à la base $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ et $\sigma \in S_n$. Soit u_σ l'endomorphisme de $\mathbb{E}$ défini par $u_\sigma(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{e_{\sigma(i)}}$.

(a) Reconnaître u_σ dans les cas

i. $n = 2$ et $\sigma = \langle 1, 2 \rangle$

ii. $n = 3$ et $\sigma = \langle 1, 2, 3 \rangle$

iii. $n = 3$ et $\sigma = \langle 1, 3 \rangle$

(b) Calculer $u_\sigma \circ u_{\sigma'}$; en déduire que u_σ est un automorphisme et que $GL(\mathbb{E})$ possède un sous-groupe isomorphe à S_n.

(c) Montrer que u_σ possède un vecteur invariant non nul.

(d) Soit P_σ la matrice de u_σ dans $\mathcal{B}$. Calculer le terme général P_σ à l'aide du symbole de Kronecker. Traduire les résultats de la deuxième question en termes de matrices

(e) Soit $1 \leqslant i_0 < j_0 \leqslant n$ et $\sigma = \langle i_0, j_0 \rangle$. On appelle P la matrice P_σ. Montrer que l'opération $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto P \times A$ correspond à l'échange des lignes L_{i_0} et L_{j_0} de A. A quoi correspond l'opération $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto A \times P$?

(f) En déduire ou démontrer directement que la matrice A_σ de l'exercice précédent est égale à $P_\sigma A P_\sigma^{-1}$.

(g) De quelles bases P_σ est-elle la matrice de passage ? Retrouver alors le résultat de la question précédente.

28. : Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = I_n$ et soit $G = \{X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ {}^tXAX = A\}$.

(a) Montrer que : $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ et que si $X \in G$ alors $\det X = \pm 1$.

(b) Montrer que : $X \in G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X \in GL_n(\mathbb{K}) \\ X^{-1} = A^tXA \end{array} \right. \Leftrightarrow XA^tX = A$.

(c) Montrer que G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$.

(d) Pour cette question $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A = I_n$ et $n = 2$. Montrer que :

$$X \in G \Leftrightarrow X \text{ est de la forme } \begin{bmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{bmatrix} \text{ avec } \varepsilon = \pm 1$$

(e) Pour cette question $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Montrer que :

$$X \in G \Leftrightarrow X \text{ est de la forme } \begin{bmatrix} \varepsilon \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \varepsilon' \operatorname{sh} t & \varepsilon\varepsilon' \operatorname{ch} t \end{bmatrix} \text{ avec } \varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$$

ESPACES EUCLIDIENS

29. : Trouver (en donnant la méthode) 5 points de $\mathbb{R}^4$ qui sont deux à deux à la même distance (non nulle !). Montrer que c'est impossible dans $\mathbb{R}^3$. Donner un exemple très simple dans $\mathbb{R}^5$.

30. :

(a) Lorsqu'on compose 2 rotations vectorielles de E_3 d'axes fixés D_1 et D_2 distincts, obtient-on toutes les rotations possibles ? Obtient-on tous les axes de rotation possible ?

(b) Même question pour 3 rotations d'axes distincts.

31. : Caractérisation du produit vectoriel de $\mathbb{E}_3$.
Soit $\mathbb{E}$ un espace euclidien muni d'une opération $\wedge$ ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{rcl} 1. \text{ l'application } (u,v) & \mapsto & u \wedge v \text{ est bilinéaire et non nulle} \\ 2. \ \forall u,v,w & \in & \mathbb{E} \quad (u \wedge v \mid w) = (u \mid v \wedge w) \\ 3. \ \forall u,v,w & \in & \mathbb{E} \quad u \wedge (v \wedge w) = (u \mid w)\, v - (u \mid v)\, w \end{array}$$

(a) Montrer que $\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \mid v)^2$.

(b) Montrer que $u \wedge u = 0$ puis que $v \wedge u = -(u \wedge v)$.

(c) Montrer que $u \wedge v$ est orthogonal à u et v.

(d) Montrer que $\dim \mathbb{E} \geqslant 2$.

(e) Soit (i,j) une famille orthonormée de $\mathbb{E}$, $k = i \wedge j$. Montrer que (i,j,k) est orthonormée et calculer $j \wedge k$ et $k \wedge i$.

(f) Soit $F = \text{Vect}(i,j,k)$; montrer que $F^\perp = \{0\}$; en déduire $\dim \mathbb{E}$.

(g) Montrer que les coordonnées de $u \wedge v$ dans (i,j,k) sont bien données par les mêmes formules que celles du produit vectoriel de $\mathbb{E}_3$.

On a donc prouvé que les propriétés 1. 2. 3. sont *caractéristiques* du produit vectoriel.

32. * Caractériser géométriquement l'endomorphisme f de l'espace euclidien $\mathbb{E}_3$ de matrice dans une base orthonormée $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; on montrera que f est la composée commutative d'une isométrie et d'une dilatation.

33. Efectuer la classification des isométries vectorielles en dimension 4, sur le modèle de ce qui a été fait en dimension 3.

34. Projection 3D d'un hypertétraèdre régulier 4D.
On donne dans $\mathbb{R}^5$ les 5 points $A_i, i = 1..5$ dont les coordonnées sont nulles sauf la ième égale à 1.

(a) A quelle distance ces points sont-ils les uns des autres ?

(b) Effectuer une translation sur ces points de sorte que leur centre de gravité soit en O ; on obtient ainsi 5 points B_i.

(c) Soit D la droite passant par le milieu de $[B_1B_2]$ et par le centre de gravité de $B_3B_4B_5$ et P l'hyperplan passant par O et orthogonal à D ; déterminer les projetés orthogonaux C_i des B_i sur P.

(d) Vérifier que $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ est une base orthonormée de P

(e) Déterminer les vecteurs coordonnées X_i des C_i dans cette base et représenter la figure formée par X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 en dimension 3.

COURBES PARAMÉTRÉES

35. : **Les joues courbes d'Alice ou courbes de Lissajous.**

Elles sont paramétrées par $\begin{cases} x = \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$ avec $\omega_1\omega_2 \neq 0$.

(a) Montrer que si l'on ne tient compte que de la courbe (et non du mouvement), on peut se ramener à : $\Gamma_{a,b}$: $\left| \begin{array}{c} x = \sin t \\ y = \sin(at+b) \end{array} \right.$ avec $a \neq 0$.

(b) Montrer que quitte à effectuer une symétrie, on peut supposer que $a \geqslant 1$ et $b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Indications : trouver les isométries entre $\Gamma_{-a,b}$ à $\Gamma_{a,b}$, entre $\Gamma_{1/a,b}$ et $\Gamma_{a,-ab}$, entre $\Gamma_{a,b+\pi}$ et $\Gamma_{a,b}$, entre $\Gamma_{a,-b}$ et $\Gamma_{a,b}$.

(c) Montrer que $\Gamma_{a,0}$ est symétrique par rapport à O et que $\Gamma_{a,\frac{\pi}{2}}$ est symétrique par rapport à (Oy).

(d) Montrer que le mouvement est périodique si et seulement si $a \in \mathbb{Q}^*$.

(e) On suppose $b = 0$ et $a = \dfrac{p}{q}$ avec $p \geqslant q \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{PGCD}(p,q) = 1$.

i. Montrer que si p ou q est pair, la courbe est symétrique par rapport à (Ox) et (Oy).

ii. Etudier en détails le joli cas $a = \dfrac{2}{3}$.

(f) Etudier le cas $b = \dfrac{\pi}{2}$ et $a = \dfrac{4}{3}$.

voir http://www.mathcurve.com/courbes2d/lissajous/lissajous.shtml

36. : (2 personnes) **Les trochoïdes (droites, à centre, épi-, hypo-)**

Un disque roule sans glisser sur une courbe (la base) ; les trochoïdes sont les trajectoires des points liés au disque dans le plan fixe.

(a) **Trochoïde droite :** c'est le cas où la base est une droite.

Le disque est de rayon 1 et roule sur l'axe des x.

Au départ, M est situé sur (Oy) ainsi que ; tout au long du trajet, $M = a$ reste constant.

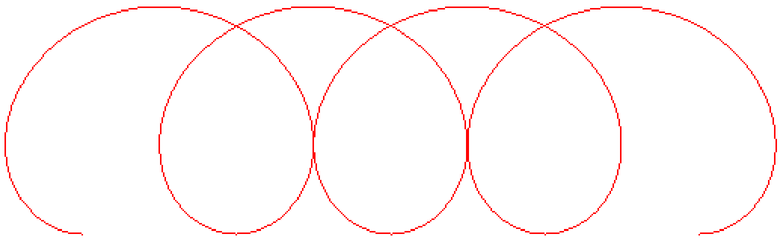
On note $\widehat{\theta} = \left(\widehat{-\overrightarrow{j}, \overrightarrow{M}}\right)$.

i. Montrer que $\left| \begin{array}{l} x = \theta - a\sin\theta \\ y = 1 - a\cos\theta \end{array} \right.$.

ii. Etudier le cas $a = 1$ (cycloïde).

iii. Etudier le cas $a > 1$ (cycloïde allongée) ; tracer pour $a = 2$.

Déterminer l'équation vérifiée par a pour que l'on obtienne la courbe ci-dessous , et en déterminer une valeur approchée :



i. Etudier le cas $a < 1$ (cycloïde raccourcie) ; tracer pour $a = 1/2$.

(b) **Trochoïde à centre :** c'est le cas où la base est un cercle ; si le disque roule à l'intérieur du cercle et a un rayon plus petit, on parle d'hypotrochoïde, si le disque roule à l'extérieur du cercle, on parle d'épitrochoïde.
On prend le cercle trigonométrique comme base. Le disque mobile est de centre , et de rayon $\frac{1}{n}$, avec $n \in]0, +\infty[$. ($n > 1$ pour une hypotrochoïde)
Au départ, et M sont sur l'axe des abscisses. Tout au long du trajet, $M = \frac{a}{n}$ reste constant. Soit N le point de contact du disque avec le cercle. Soit $\widehat{\theta} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{ON}\right)$ et $\alpha = \left(\overrightarrow{\ \ N}, \overrightarrow{\ \ M}\right)$.

i. Montrer que M a pour affixe $z = \left(1 + \frac{\varepsilon}{n}\right) e^{i\theta} - a\frac{\varepsilon}{n} e^{i(\theta+\alpha)}$, avec $\alpha = \varepsilon n\theta$, $\varepsilon = 1$ pour une épi- et $\varepsilon = -1$ pour une hypo-.

ii. cas $\varepsilon = +1$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a = 1$: ce sont les **épicycloïdes** à n points de rebroussement.
Montrer qu'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi/n[$ (utiliser l'expression complexe - on montrer qu'on obtient toute la courbe par symétrie puis par rotations) et tracer le motif de base, vérifier qu'il y a bien n points de rebroussement.
Le cas $n = 1$ donne la célèbre *cardioïde*. Dans ce cas, montrer qu'on peut écrire $z = 1 + 2(1 - \cos\theta) e^{i\theta}$, et en déduire que l'on peut prendre $\rho = 2(1 - \cos\theta)$ dans un bon repère.

Le cas $n = 2$ donne la courbe appelée *néphroïde*.

iii. cas $\varepsilon = +1$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \neq 1$:
lorsque $a < 1$, c'est une épicycloïde raccourcie, lorsque $a > 1$, c'est une épicycloïde allongée.
Les courbes obtenues pour $n = 1$ s'appellent limaçons de Pascal (ou haricots pour $a < 1$)
Pour $n = 2$, trouver pour quelle valeur de a on obtient :

et étudier la courbe en détail.

iv. cas $\varepsilon = -1$, $n = 2$ et $a = 1$; la courbe s'appelle la "droite de la Hire", et le phénomène est souvent utilisé en mécanique pour fabriquer des translations à partir de rotations.
Quel type de courbe obtient-on si l'on prend $a \neq 1$?

v. cas $\varepsilon = -1$, $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$ et $a = 1$; ce sont les hypocycloïdes à n points de rebroussement. Le cas $n = 3$ donne la *deltoïde*, le cas $n = 4$ donne l'*astroïde*.
Montrer qu'on peut mettre son équation sous la forme $\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases}$

vi. cas $\varepsilon = -1$, $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$ et $a \neq 1$; ces courbes ont des formes aussi diverses que variées, dessinez-en quelques-une pour vous entraîner.

vii. Restent tous les cas où n n'est pas entier.

- Le mouvement est périodique si et seulement si n est rationnel
- Un très joli cas est le cas : $\begin{cases} n = \frac{5}{2} \\ \varepsilon = -1 \end{cases}$ qui donne de belles courbes à 5 branches.

- Montrer que pour $\varepsilon = -1$, lorsque l'on change k en $\dfrac{k}{k-1}$, la courbe n'est pas modifiée.

37. : **Les rosaces et leurs conchoïdes :**
Ce sont les courbes admettant pour équation
$$\rho = \cos n\theta + a$$
avec $n > 0$ (non forcément entier) et $a \geqslant 0$

(a) Montrer que l'on peut prendre $\left[0, \dfrac{\pi}{n}\right]$ comme intervalle d'étude (bien indiquer les transformations à effectuer pour obtenir toute la courbe) et que si $a = 0$, on peut même prendre $\left[0, \dfrac{\pi}{2n}\right]$. Tracer le motif élémentaire.

(b) cas $n = 1$: les limaçons de Pascal (ou conchoïdes de cercles par rapport à l'un de leurs points)
Tracer pour $a = 0,\ a = 0.5,\ a = 1,\ a = 2$

(c) cas général $a = 0$: les rosaces

i. quels sont les points où la courbe est tangente au cercle $\rho = 1$?

ii. combien y-a-t-il de tels points dans les cas suivants ?

- n est entier pair (tracer)
- n est entier impair (tracer)
- $n = \dfrac{3}{2}$; étudier les points doubles et tracer
- $n = \dfrac{2}{3}$; étudier les points doubles et tracer
- $n \in \mathbb{Q}_+^*$
- $n \notin \mathbb{Q}$.

(d) cas $a > 0$:

- si $a < 1$, on obtient facilement un tracé, en marquant les points remarquables situés sur les cercles de rayon $1 - a$ et $1 + a$.
- si $a = 1$, montrer qu'il y a des points de rebroussement et utiliser le cercle de rayon 2.
- si $a > 1$, utiliser les cercles de rayon $a - 1$ et $a + 1$.

38. : Deux cercles de rayon 1/2 tournent autour d'un de leur point O de telle sorte que le rapport de leurs vitesses de rotation est constant égal à k (nombre pouvant être négatif). On demande de déterminer une équation polaire de la trajectoire du deuxième point d'intersection. Pour quels valeurs de k obtient-on un quadrifolium $\rho = \cos 2\theta$?

39. : Une droite et un cercle de rayon 1/2 tournent autour d'un de leur point O de telle sorte que le rapport de leurs vitesses
de rotation est constant égal à k (nombre pouvant être négatif). On demande de déterminer une équation polaire de la trajectoire du deuxième point d'intersection. Pour quels valeurs de k obtient-on un quadrifolium $\rho = \cos 2\theta$?

40. : les bolas.

Un jongleur fait tourner son bras avec une vitesse angulaire ω_1; il tient une chaîne de même longueur que son bras qui tourne avec une vitesse angulaire ω_2 autour de sa main ; quand son bras fait $p > 0$ tours, sa chaîne en fait q (on prend $q > 0$ si les mouvements sont dans le même sens, et $q < 0$ sinon).

Montrer à l'aide des complexes que l'extrémité de sa chaîne décrit une rosace d'équation polaire $\rho = \cos n\theta$ et exprimer n en fonction de p et q.

Donner des valeurs de p, q pour que $n = 2$, puis 3/2, puis 2/3. Etudier et tracer les courbes.

41. : un profil de volume maximal.

(a) Un demi-cercle a une longueur L; calculer l'aire S_1 du demi-disque associé en fonction de L (on peut démontrer que parmi toutes les courbes de longueur L joignant deux points d'une droite, en restant du même côté de la droite, celle qui englobe la plus grande aire est le demi-cercle) ; calculer en fonction de L le volume V_1 de la sphère engendrée pâr la rotation du demi-cercle autour de son diamètre.

(b) On donne la courbe paramétrée (C) : $\begin{cases} x = a\sqrt{\cos t} \\ y = \dfrac{a}{2}\displaystyle\int_0^t \sqrt{\cos u}du \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, joignant un point A à un point B ;

i. Calculer sa longueur $L = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ (on ne cherchera pas à calculer l'intégrale).

ii. Calculer l'aire entre la courbe et l'axe des y : $S_2 = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\frac{dy}{dt}dt$.

iii. Calculer le volume V_2 du solide obtenu par rotation de la courbe (C) autour de l'axe des y.

iv. Comparer $\dfrac{S_1}{L^2}$ et $\dfrac{S_2}{L^2}$, puis $\dfrac{V_1}{L^3}$ et $\dfrac{V_2}{L^3}$; conclusion ? (on peut démontrer que parmi toutes les courbes planes de longueur L joignant deux points d'une droite, en restant du même côté de la droite, celle dont la rotation autour de la droite englobe le plus grand volume est la courbe (C)).

42. * : Une personne marche sur un plateau tournant à vitesse constante autour d'un point O ; le mouvement de la personne sur le plateau est rectiligne uniforme et ne passe pas par O. Paramétrer le plus simplement possible la trajectoire dans le plan fixe ; tracer des courbes ; à quelle condition y a-t-il un rebroussement ?

43. : Courbe $e^{xy} = e^x + e^y$.

On considère la courbe (C) d'équation en repère orthonormé : $e^{xy} = e^x + e^y$.

(a) Donner un axe de symétrie de cette courbe et montrer que cette courbe est symétrique par rapport au point de coordonnées $(1/2, 1/2)$.

(b) Trouver une paramétrisation du type $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ de cette courbe à l'aide du changement de variable $x = u+t, y = u-t$. Tracer la courbe.

(c) Déterminer ses asymptotes.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

44. : Dérivabilité forte.

(a) Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur l'adhérence $\overline{U}$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, telle que pour tout M_0 de $\overline{U}$, $f(M)$ tend vers $f(M_0)$ quand M tend vers M_0 en restant dans U ; montrer que f est continue sur $\overline{U}$.

(b) Soit maintenant f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on dira que f est *fortement dérivable* en x_0 si f est définie au voisinage de x_0 et $(f(x) - f(y))/(x-y)$ a une limite finie quand (x, y) tend vers (x_0, x_0) avec $x > y$.

i. Montrer que f fortement dérivable en x_0 implique f continue sur un voisinage de x_0.

ii. Montrer qu'il existe des fonctions fortement dérivables en x_0 et dérivables sur aucun voisinage de x_0 (donc non $\mathcal{C}^1$ en x_0).

iii. Montrer que f fortement dérivable sur un intervalle ouvert I équivaut à f $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle.
Indications : pour démontrer la CS de iii) utiliser le théorème des accroissements finis ; pour démontrer la CN, utiliser le a).

45. : Aire d'une surface.

On démontre que l'aire de la portion de la surface d'équation $z = f(x, y)$ délimitée par la condition $(x, y) \in D$ est donnée par l'intégrale

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}$$

(a) Calculer l'aire de la portion de la surface d'équation $z = xy$ (paraboloïde hyperbolique) délimitée par la condition $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

(b) Aire d'une surface de révolution :
On fait tourner la courbe $z = f(x)$, $y = 0$ ($x \in [0, R]$) autour de Oz ; la surface obtenue a pour équation $z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$; montrer que l'aire de cette surface est donnée par la formule :

$$2\pi \int_0^R r\sqrt{1 + f'^2(r)}dr$$

Calculer par exemple l'aire de la sphère.

(c) Le solide cylindrique d'axe Oz et de rayon r ($x^2 + y^2 \leqslant R^2$) découpe sur le cylindre d'axe Ox et de rayon r ($y^2 + z^2 = r^2, r \leqslant R$) deux calottes symétriques par rapport au plan xOy ; montrer que l'aire de chacune est donnée par la formule :

$$4R \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{R^2 - x^2}}dx$$

Que se passe-t-il quand $r = R$?

46. Surfaces minimales de translation.
Les surfaces minimales sont les surfaces correspondant physiquement à un film de savon. On montre qu'une surface d'équation $z = f(x, y)$ est minimale ssi

$$\left(1 + p^2\right)t - 2pqs + \left(1 + q^2\right)r = 0$$

(en utilisant les notations de Monge : $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, etc).
On demande de déterminer toutes les surfaces minimale où $f(x, y)$ est de la forme $f(x, y) = g(x) + h(y)$.
Etudier et représenter la surface correspondante.
Indication : on doit tomber sur l'équation différentielle : $\dfrac{g"}{1 + g'^2} = cte$.

APPLICATIONS AFFINES

47. :

(a) Montrer qu'un sous-groupe de $GA(\mathbb{E})$ qui ne contient pas de translations propres (i.e. $\neq \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$) est isomorphe à un sous-groupe de $GL\left(\overrightarrow{\mathbb{E}}\right)$.

(b) Montrer qu'un sous-groupe fini de $GA(\mathbb{E})$ est tel que tous ses éléments ont un point fixe en commun, donc ne contient jamais de translation propre (utiliser la conservation de l'isobarycentre).

(c) Donner un exemple de sous-groupe de $GA(\mathbb{E})$ qui ne contient pas de translations propres, mais dont certains éléments n'ont pas de point fixe.

(d) Montrer que si un sous-groupe de $GA(\mathbb{E})$ est uniquement formé d'homothéties, alors ces homothéties ont toutes le même centre.

48. : soit $f \in A(\mathbb{E})$; désignons par F l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ pour M décrivant $\mathbb{E}$.

(a) Montrer que F est un sous-espace *affine* de $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ de direction $\mathrm{Im}\left(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{\mathbb{E}}}\right)$, qui est *égal* à $\mathrm{Im}\left(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{\mathbb{E}}}\right)$ ssi f possède au moins un point fixe.

(b) En déduire qu'en dimension finie, f possède un unique point fixe ssi seul $\overrightarrow{0}$ est invariant par $\overrightarrow{f}$.

(c) Application : montrer qu'en dimension finie, les similitudes de rapport $\neq 1$ ont un unique point fixe.

(d) Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$; Montrer que f commute avec $t_{\overrightarrow{u}}$ ssi $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{\mathbb{E}}}\right)$.

(e) Montrer que $t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$ possède au moins un point fixe ssi $\overrightarrow{u} \in F$.

(f) En déduire que si $\overrightarrow{\mathbb{E}} = \mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{\mathbb{E}}}\right) \oplus \mathrm{Im}\left(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{\mathbb{E}}}\right)$ il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u}$ et une unique application affine g ayant un point fixe telle que $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{u}}$; montrer que ceci est vérifié par exemple si $\overrightarrow{f}$ est une symétrie ou si $\overrightarrow{f}$ est une isométrie d'un espace euclidien.