PCSI — **Tout sur le triangle** — R. FERRÉOL

1. DONNÉES ET NOTATIONS
   ∗ 3 points A, B, C non alignés d'un plan affine euclidien P orienté de façon à ce que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit directe.
   ∗ A, B, C, sommets du triangle ABC ; les mêmes lettres désignent les mesures dans $[0, \pi]$ des angles en A, B, C.
   ∗ $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ les côtés, de longueurs respectives a, b, c.
   ∗ $2p = a + b + c$, périmètre du triangle.
   ∗ S, aire du triangle.
   ∗ I_A, I_B, I_C, milieux de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$; ce sont les pieds des médianes issues de A, B, C.
   ∗ H_A, H_B, H_C projetés orthogonaux de A, B, C sur (BC),(CA) et (AB) ; ce sont les pieds des hauteurs (AH_A), (BH_B) et (CH_C).
   ∗ $h_A = AH_A, h_B = BH_B, h_C = CH_C$.

2. RELATIONS FONDAMENTALES
   Un astérisque $(*)$ signifie qu'il y a 2 autres relations qui s'obtiennent par permutation des points.
   Inégalité triangulaire (qui est une CNS d'existence du triangle) :

$$\boxed{|b - c| < a < b + c \quad (*) \ \boxed{1}}$$

$$\boxed{A + B + C = \pi \ \boxed{2}}$$

d'où

$$\boxed{\boxed{3}\ \left|\begin{array}{l} \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\ \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \\ \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1 \end{array}\right.}$$

$$\boxed{a = b \cos C + c \cos B \ \ (*) \ \boxed{4}}$$

$$\boxed{\left|\begin{array}{l} \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \ \ (*) \ \boxed{5} \text{ (formule d'Al Kashi)} \\ \sin A = \dfrac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \ (*) \ \boxed{6} \text{ (formule de Héron)} \end{array}\right.}$$

$$\boxed{S \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} a h_a \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \ \ \boxed{7}}$$

La loi des sinus :

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S} \ \ \boxed{8}}$$

Les formules de la médiane :

$$\boxed{\boxed{9}\ \left|\begin{array}{l} b^2 + c^2 = \frac{1}{2} a^2 + 2AI_A^2 \ (*) \\ b^2 - c^2 = 2\overline{BC}\,.\,\overline{H_A I_A} \quad (*) \end{array}\right.}$$

Indications de démonstration :

$\boxed{1}$ Utiliser les conditions d'intersection de 2 cercles.

$\boxed{2}$ Considérer la figure :

$\boxed{4}$ Projeter sur (BC).

$\boxed{5}$ Résoudre en $\cos A$ le système obtenu dans $\boxed{4}$ ou calculer $\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2$.

$\boxed{6}$ Utiliser $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$.

$\boxed{7}$ Pour la première égalité, considérer la figure :

Pour la deuxième égalité, utiliser $\sin A = \dfrac{h_B}{c} = \dfrac{2S}{bc}$ ou bien $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI_A} \wedge \overrightarrow{BC}$.

$\boxed{8}$ Se déduit de $\boxed{7}$.

$\boxed{9}$ Utiliser $b^2 = \left(\overrightarrow{AI_A} + \overrightarrow{I_AC}\right)^2$ et $c^2 = \left(\overrightarrow{AI_A} + \overrightarrow{I_AB}\right)$.

3. TRIANGLES ISOCÈLES
PROP $A = B \iff a = b$ (utiliser $\boxed{5}$)
DEF Un triangle est dit *isocèle* s'il a 2 cotés (ou 2 angles) égaux, *équilatéral*, s'il a trois côtés égaux (donc 3 angles de mesure $\frac{\pi}{3}$).

4. TRIANGLES RECTANGLES
PROP : $A = \frac{\pi}{2} \iff a^2 = b^2 + c^2$ (théorème de Pythagore)
DEF Un triangle est dit *rectangle* s'il a un angle droit.

5. CAS D'ÉGALITE DES TRIANGLES
On devrait dire cas d'*isométrie* des triangles.
PROP : pour ABC et $A'B'C'$ 2 triangles, les propositions suivantes sont équivalentes :

   (a) $\exists f \in Is(P) \ / \ f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$

   (b) $a = a', b = b', c = c'$

   (c) $A = A', b = b', c = c' **$

   (d) $A = A', B = B', c = c' **$
   Dans le temps on disait, 2 triangles sont égaux s'ils ont 3 côtés correspondants égaux, ou 2 côtés égaux et un angle égal ou 2 angles égaux et un coté égal.
   Indication : démontrer $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.
   Les 3 dernières implications utilisent les formules $\boxed{5}$; pour 4. $\Rightarrow$ 1. utiliser la rotation r telle que $r(A) = A'$ et $\vec{r}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$et composer éventuellement avec une symétrie.

6. CAS DE SIMILITUDE DES TRIANGLES
PROP : pour ABC et $A'B'C'$ 2 triangles, les propositions suivantes sont équivalentes :

   (a) $\exists f \in Sim(P) \ / \ f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$

   (b) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

   (c) $A = A', B = B', C = C'$
   Indication : prouver $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$(utiliser les formules $\boxed{5}$) ; pour $(c) \Rightarrow (a)$, utiliser les cas d'égalité.

7. POINTS REMARQUABLES DU TRIANGLE

   (a) Les médianes sont concourantes au *centre de gravité* G de ABC. On a $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI_A}$; G est aussi le point rendant minimum la fonction scalaire de Leibniz :
   $$f(M) = AM^2 + BM^2 + CM^2$$

   (b) Les trois hauteurs sont concourantes en l'*orthocentre* du triangle ; utiliser par exemple :
   $$\forall X \in P \quad \overrightarrow{AX}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BX}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CX}.\overrightarrow{AB} = 0$$

   (c) Centre du cercle circonscrit.

i. Il existe un unique point O équidistant des trois sommets ; c'est le point de concours des médiatrices des trois côtés, et c'est le centre du cercle circonscrit (C) au triangle ; on appelle A', B', C' les points diamétralement opposés à A, B, C.

ii. Sachant que $(\widehat{B'B, B'C}) = A$ (théorème de l'arc capable) montrer que $\sin A = \dfrac{a}{2R}$ d'où :

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad \boxed{10}}$$

$$\boxed{abc = 4RS \quad \boxed{11}}$$

$$\boxed{R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{p}{\sin A + \sin B + \sin C} \quad \boxed{12}}$$

$$\boxed{S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \quad \boxed{13}}$$

iii. O est l'orthocentre du triangle $I_A I_B I_C$.

iv. I_A est le milieu de $[A'H]$ $(*)$

v. Les symétriques orthogonaux de l'orthocentre par rapport aux côtés appartiennent au cercle circonscrit. (Indication : si s est la symétrie orthogonale par rapport à (BC) montrer que $Hs(0) = R$ et regarder $\vec{s}\left(\overrightarrow{Hs(O)}\right)$, ou bien montrer que $(\widehat{AB, AC}) = (\widehat{HC, HB}) = (\widehat{s(H)B, s(H)C})$).

(d) Centre du cercle inscrit.

i. Il existe un unique point I équidistant de $(AB), (BC), (CA)$; ce point est le point de concours des 3 bissectrices intérieures des angles géométriques du triangle ; appelons U, V, W les projetés orthogonaux de I sur les côtés $[BC], [CA], [AB]$; on pose $IU = IV = IW = r$; le cercle (c) de centre I et de rayon r est le *cercle inscrit dans le triangle.*

ii. En ajoutant les aires des triangles BIC,CIA et AIB, montrer que

$$\boxed{S = pr \quad \boxed{14}}$$

iii. Montrer que $AV = AW = p - a$ $(*)$ (poser $x = AV, y = BU$ et $z = CW$ et calculer $x + y, y + z, z + x$)

iv. En déduire AI^2 en fonction a, b, c.

v. Soient X, Y, Z les pieds des bissectrices issues de A, B, C sur les côtés opposés ; montrer que

$$\frac{XB}{c} = \frac{XC}{b} = \frac{a}{b+c}$$

(utiliser $\boxed{10}$ dans ABX et ACX).

8. LIENS ENTRE O,G et H. CERCLE DES 9 POINTS

Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $\dfrac{1}{2}$; quel est le transformé du triangle ABC ? En utilisant le c. du VII. 3. montrer que $h(H) = 0$ et en déduire le fait que O, G et H sont alignés : leur droite commune s'appelle la droite d'Euler du triangle. Montrer $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$.

Soit $(C') = h((C))$; montrer que son centre Ω est le milieu de $[OH]$ et son rayon $\dfrac{R}{2}$; montrer que l'homothétie h' de centre H et de rapport $\dfrac{1}{2}$ transforme aussi (C) en (C'). En déduire que (C') passe par :

(a) les pieds des médianes du triangle ABC

(b) les pieds des hauteurs

(c) les milieux des segments joignant chaque sommet à l'orthocentre.
(C') s'appelle le *cercle d'Euler* ou *cercle des 9 points* du triangle ABC.

9. COORDONNÉES BARYCENTRIQUES DE CES POINTS REMARQUABLES.

   (a) Démontrer que

   $$\forall M \in P \quad \det\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CM}\right)\overrightarrow{AM}+\det\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{AM}\right)\overrightarrow{BM}+\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$$

   En déduire que les coordonnées barycentriques de M dans le repère (A,B,C) sont

   $$\left|\begin{array}{l}\text{aire}(MBC)\\ \text{aire}(MCA)\\ \text{aire}(MAB)\end{array}\right.$$

   (il s'agit des aires "algébriques").

   (b) G a pour coordonnées barycentriques $\left|\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}\right.$. En déduire 3 triangles ayant la même aire.

   (c) I a pour coordonnées barycentriques $\left|\begin{array}{l}\sin A\\ \sin B\\ \sin C\end{array}\right.$ ou $\left|\begin{array}{l}a\\ b\\ c\end{array}\right.$ (utiliser 1. et la formule $\boxed{10}$ ou bien utiliser 7. (d).v.

   (d) O a pour coordonnées barycentriques $\left|\begin{array}{l}\sin 2A\\ \sin 2B\\ \sin 2C\end{array}\right.$ ou $\left|\begin{array}{l}a\cos A\\ b\cos B\\ c\cos C\end{array}\right.$ (utiliser $\overline{\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}}=R^2\sin 2A$).

   (e) H a pour coordonnées barycentriques $\left|\begin{array}{l}\tan A\\ \tan B\\ \tan C\end{array}\right.$ ou $\left|\begin{array}{l}a/\cos A\\ b/\cos B\\ c/\cos C\end{array}\right.$ (utiliser $\overrightarrow{HO}=2\overrightarrow{HG}$)